



TITLE:

# ファジィ数の順序関係・基本演算 とファジィ非線形計画への応用(数 理計画モデルにおける最適化理論)

AUTHOR(S):

古川, 長太

---

CITATION:

古川, 長太. ファジィ数の順序関係・基本演算とファジィ非線形計画への応用(数理計画モデルにおける最適化理論). 数理解析研究所講究録 1992, 798: 151-159

ISSUE DATE:

1992-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82796>

RIGHT:

## ファジィ数の順序関係・基本演算とファジィ非線形計画への応用

古 川 長 太  
九州大学理学部

### 1. はじめに

通常の線形計画問題をファジィ線形計画問題に拡張するときにはまず始めに考えなければならないのは、ファジィ数の間の基本演算の定義と、不等号の解釈をどうするかについてである。この2つのことについて、既に代表的な研究として D. Dubois, H. Prade による [1], [3], [4] 等がある。それ以後、彼等の定義に基づいたファジィ線形計画に関する研究が多くの人達によって為されてきた。

ここであらためて考えてみたい点がある。その第1は Dubois, Pradeによって定義された演算が線形演算ではないこと、第2は同じく彼等によるファジィ数間の大小関係が実数の大小関係の自然なファジィ化とは異なる概念であることである。第1の点はファジィ線形計画に対しては殆ど支障はないが、ファジィ非線形計画に応用するためには、このことが大きな障害になる。また第2の点については、ファジィ線形計画に適用して非ファジィな問題に変換した結果が、ファジィ数のレベルに依存することになるという性質がある。不等号をファジィ数間の包含関係でおきかえた問題を解く方法も研究されているが (e. g. [2])、一般のファジィ集合の場合とは違って、ファジィ数間の包含関係でおきかえると非常に窮屈な制約条件を考えることになってしまう。

以上の理由から、本報告は通常の線形計画の出来るだけ自然なファジィ化が為されるように、かつまたそれがファジィ非線形計画にも十分適合し得るように基本概念の設定から考え直し、理論を組み立てて行こうとする試みを与えるものである。

### 2. ファジィ数の順序関係

一般にファジィ集合  $A$ ,  $B$  のメンバーシップ関数を  $\mu_A$ ,  $\mu_B$  で表す。

**定 義 2.1** ファジィ集合  $A$  のメンバーシップ関数  $\mu_A$  が実数の全体  $R$  上で定義された  $[0, 1]$  への関数で、次のことを満たすとき  $A$  はファジィ数であるという：

実数  $m$  が一意に存在して

- (a)  $\mu_A(m) = 1$ ,  
 (b)  $\mu_A$  は  $(-\infty, m]$  上で広義単調増加 ,  
 (c)  $\mu_A$  は  $[m, +\infty)$  上で広義単調減少 .

通常ファジィ数の定義では上記の  $m$  の一意性は仮定していないが、ここでは一意としておく。ファジィ数  $A$  に対して定まる上記の  $m$  を  $A$  のセンターと呼び、 $m_A$  で表す。同様にファジィ数  $B, C$  のセンターを  $m_B, m_C$  とかく。

ファジィ数の全体からなる集合を  $F$  とかくことにする。実数のメンバーシップ関数はその特性関数であり、特性関数は明らかに上の定義をみたすから、次の関係が成り立つ。

$$R \subset F .$$

定義 2.2 2つのファジィ数  $A, B$  に対して、次の (a), (b) が成立することをもって『 $A$  は  $B$  より大である』といい、これを記号で

$$A \succeq B$$

とかく。

- (a)  $m_B \leq m_A$  ,  
 (b)  $m_B \leq c \leq m_A$  なる  $c$  が存在して  
 $\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x < c$  ,  
 $\mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad \forall x > c$  ,  
 をみたす。

命題 2.1 実数  $\alpha, \beta$  に定義 2.2 で導入した大小関係をあてはめると、

$$\alpha \succeq \beta \iff \alpha \geq \beta$$

が成り立つ。

命題 2.2  $\alpha \in R, A \in F$  にたいして

- (a)  $\alpha \preceq A \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x < \alpha$  ,  
 (b)  $A \preceq \alpha \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x > \alpha$  .

系 2.1

- (a)  $0 \preceq A \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x < 0$  ,  
 (b)  $A \preceq 0 \iff \mu_A(x) = 0 \quad \forall x > 0$  .

定理 2.1 定義 2.2 で導入した大小関係は、 $F$  上で半順序の公理をみたす。

命題 2.1 はファジィ数の集合上で定義した大小関係が、実数上では通常の実数の

大小関係と一致することを示している。また、系 2.1(a) の右辺の式は、従来から使われている正のファジィ数の定義に等しく、同じく (b) の右辺の式は負のファジィ数の定義に等しい。これらの結果と定理 2.1により、はじめに定義したファジィ数間の順序が、実数間の順序のひとつの自然なファジィ化としての拡張であることが分かる。

### 3. L-ファジィ数の基本演算

定義 3.1 R 上で定義された実数値関数  $L$  は次の条件をみたすものとする。

1.  $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in R,$
2.  $L(0) = 1,$
3.  $L$  は  $[0, +\infty)$  上で狭義単調減少,
4.  $L(x_0) = 0$  をみたす正数  $x_0$  が存在する。

このとき関数  $L$  を shape function と呼び、4. の  $x_0$  を  $L$  の零点と呼ぶ。

定義 3.2  $m, \alpha$  ( $\alpha \neq 0$ ) を任意の実数とする。ファジィ数  $A$  のメンバーシップ関数  $\mu_A$  が shape function  $L$  を使って

$$\mu_A(x) = L((x-m)/\alpha) \vee 0, \quad x \in R, \quad (1)$$

で表されるとき、 $A$  を  $L$ -ファジィ数と呼ぶ。このとき定義 2.1 で定めたことにより  $m$  は  $A$  のセンターになる。 $\alpha$  を  $A$  の偏差係数と呼ぶ。

$\alpha$  の絶対値が小さいほど (1) の曲線は、 $x = m$  のまわりに集中してくる。そこで  $\alpha \rightarrow 0$  のときの極限として  $\alpha = 0$  の時 (1) は、

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x = m \\ 0 & \text{if } x \neq m, \end{cases} \quad (2)$$

であると解釈することにする。以下、(1), (2) を併せてあらためて  $L$ -ファジィ数と呼ぶことにする。

(注) 通常の  $L$ - $R$  ファジィ数の定義では  $\alpha$  は正の値だけに限って定義しているが、ここでは負、零の値も許していることが従来とは異なる点である。

$L$ -ファジィ数を、記号で簡単に

$$A = (m, \alpha)_L, \quad (3)$$

と表すことにする。(2) によって  $\alpha = 0$  のときは

$$(m, 0)_L = m, \quad (4)$$

となる。

shape function  $L$  を任意にとったとき、 $L$ -ファジィ数の全体からなる集合を

$F_L$  とかく。即ち

$$F_L = \{A = (m, \alpha)_L \mid m, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad (5)$$

定義 3.3  $F_L$  上に次の演算を導入する：

$A = (m, \alpha)_L$ ,  $B = (n, \beta)_L$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  に対し

1.  $A + B = (m + n, \alpha + \beta)_L$ ,
2.  $A - B = (m - n, \alpha - \beta)_L$ ,
3.  $\lambda A = (\lambda m, \lambda \alpha)_L$ .

命題 3.1

- (a) 定義 3.3 の演算の下で  $F_L$  は線形空間をなす。このとき、 $F_L$  の零元は  $(0, 0)_L$  である。
- (b) 定義 3.3 の演算を  $\mathbb{R}$  上に制限したものは、通常の実数間の演算と一致する。

$F_L$  の零元は (4) により本質的には実数の零に等しいが、 $F_L$  の元であるから形式的に区別して

$$\theta = (0, 0)_L, \quad (6)$$

とおく。

#### 4. L-ファジィ数の順序関係

定理 4.1

$A = (m, \alpha)_L$ ,  $B = (n, \beta)_L$ ,  $x_0$  を  $L$  の零点とする。 $\alpha\beta \geq 0$  とする。このとき次の関係が成立する。

$$A \succeq B \iff \begin{cases} m \geq n, \\ |\alpha - \beta| \leq (m - n) / x_0. \end{cases} \quad (7)$$

定理 4.2

$A, B, x_0$  は定理 4.1 に同じとする。 $\alpha\beta < 0$  とする。このとき次の関係が成立する。

$$A \succeq B \iff \begin{cases} m \geq n, \\ |\alpha + \beta| \leq (m - n) / x_0. \end{cases} \quad (8)$$

命題 4.1

$A = (m, \alpha)_L$ ,  $B = (n, \beta)_L$  に対して次のことが成立する。

- (a)  $A \succeq \theta \iff [m \geq 0, |\alpha| \leq m/x_0]$ ,
- (b)  $A \preceq \theta \iff [m \leq 0, |\alpha| \leq (-m)/x_0]$ ,
- (c)  $A \succeq \theta \iff (-A) \preceq \theta$ ,
- (d)  $A \succeq B \iff \lambda A \succeq \lambda B \quad \forall \lambda > 0$ ,
- (e)  $A \succeq B \iff \lambda A \preceq \lambda B \quad \forall \lambda < 0$ .
- (f)  $A \succeq \theta, B \succeq \theta \implies A + B \succeq \theta$ .

系 4.1  $A \succeq \theta$  をみたす  $L$ -ファジィ数  $A$  の全体を  $K_L$  とおくと、 $K_L$  は  $F_L$  における凸錐である。

命題 4.2

$A = (m, \alpha)_L$ ,  $B = (n, \beta)_L$ ,  $\alpha\beta \geq 0$  とする。このとき

$$A \succeq B \iff A - B \succeq \theta \iff B - A \preceq \theta.$$

命題 4.3

命題 4.2 の  $A, B$  において  $\alpha\beta < 0$  とする。このとき次のことが成立する：

$$A - B \succeq \theta \implies A \succeq B. \quad (9)$$

## 5. ファジィ線形計画への応用

これまでに与えた概念と定義を使って、2つの型のファジィ線形計画問題を定式化する。形式的には従来のものとおなじであるが、意味的には新しい問題である。更にこれらの問題がここで得られた定理を使って非ファジィな最適化問題に変換されることが示される。

## 5.1 目的関数の係数が実数の場合

$c_1, c_2, \dots, c_n$  を与えられた任意の実数、 $L_1, L_2, \dots, L_m$  を与えられた任意の shape function とする。各  $i$  にたいして、 $L_i$  の零点を  $x_{i0}$  とおく。また各  $i$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) に対して

$$A_{ij} = (m_{ij}, \alpha_{ij})_{L_i}, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

$$B_i = (n_i, \beta_i)_{L_i},$$

をいずれも与えられた  $L_i$ -ファジィ数とする。ここで  $m_{ij}, n_i$  はすべて任意の実数、 $\alpha_{ij}, \beta_i$  はすべて任意の非負の実数とする。次の最小化問題を考える。

$$\begin{aligned}
 & \text{(FLP1)} \quad \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \quad \text{subject to} \\
 & \quad x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \cdots + x_n A_{in} \lesssim B_i, \quad i=1, 2, \dots, m, \\
 & \quad x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

定理 4.1を使って次の定理が導かれる。

定理 5.1 問題 (FLP1) は次の線形計画問題と同値である。

$$\begin{aligned}
 & \text{(LP1)} \quad \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 & \quad \text{subject to} \\
 & \quad \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j \leq n_i, \quad i=1, 2, \dots, m \\
 & \quad \sum_{j=1}^n (m_{ij} + x_{i0} \alpha_{ij}) x_j \leq n_i + x_{i0} \beta_i, \\
 & \quad \sum_{j=1}^n (m_{ij} - x_{i0} \alpha_{ij}) x_j \leq n_i - x_{i0} \beta_i, \\
 & \quad x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n \\
 & \quad i=1, 2, \dots, m
 \end{aligned}$$

## 5. 2 目的関数の係数がファジィ数の場合

$L_0$  を与えられた任意の shape function とし、 $L_0$  の零点を  $x_0$  とおく。

$$C_j = (l_j, \gamma_j) L_0, \quad j=1, 2, \dots, n$$

を与えられた  $L_0$  ファジィ数とし、 $l_j$  は任意の実数、 $\gamma_j$  は任意の非負実数とする。  
このとき次の問題を考える。

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \sum_{j=1}^n x_j C_j \\
 & \text{(FLP2) subject to} \\
 & \quad x_1 A_{i1} + x_2 A_{i2} + \cdots + x_n A_{in} \lesssim B_i, \\
 & \quad \quad \quad i=1, 2, \dots, m \\
 & \quad x_j \geq 0, \quad j=1, 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

上の問題で“minimize”の意味は、2節で導入した半順序に関するものとする。したがって一般に (FLP2) の最小解が存在するとは限らないので次の定義をする。

定義 5.1 (FLP2)における制約条件のすべてをみたす点  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  の全体の集合を  $S$  とおく。  $S$  の点  $X^*$  が次の関係をみたすとき、  $X^*$  は (FLP2) の efficient solution であるという。即ち

$$[X \in S, CX < CX^* \implies CX = CX^*],$$

但し  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ ,  $CX$  は内積を表す。

定理 4.1により、次の定理を得る。

定理 5.2 問題 (FLP2) の efficient solution を求めることは、次の問題を解くことと同値である。

$$\begin{aligned}
 & \text{Find } X^* \in S \\
 & \text{such that :} \\
 & \quad X \in S, \quad \sum_{j=1}^n l_j (x_j^* - x_j) \geq 0, \\
 & \text{(P2) } \quad \left| \sum_{j=1}^n r_j (x_j^* - x_j) \right| \\
 & \quad \leq \sum_{j=1}^n l_j (x_j^* - x_j) / x_0, \\
 & \quad \implies \sum_{j=1}^n l_j (x_j^* - x_j) = 0.
 \end{aligned}$$

ただし  $x_j^*, x_j$  はそれぞれ  $X^*, X$  の第  $j$  成分を表す。



## 6. $F_L$ に値をとる写像の基本的性質

定義 6.1  $(m, \alpha) \in F_L$  に対し、ノルムを次式で定義する。

$$\| (m, \alpha) \| = \| m \| + \| \alpha \|$$

命題 6.1  $F_L$  は定義 6.1により線形ノルム空間をなす。

以下  $X$  は線形ノルム空間で、 $X$  の点を  $x, y$  などで表す。

定義 6.2  $T: X \rightarrow F_L$  に対し次のことが成り立つとき、 $T$  は convex map であるという。

$$\forall x, y \in X, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \text{ に対して}$$

$$T(\lambda x + (1-\lambda)y) \preceq \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y).$$

### 定理 6.1

$$T(x) = (m(x), \alpha(x))_L, \quad x \in X$$

と表される写像  $T: X \rightarrow F_L$  に対して  $T$  が convex map であるための必要十分条件は、次の (1), (2) が成り立つことである。

(1)  $m(x)$  が通常の意味の凸関数、

(2)  $\forall x, y \in X, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$  に対して

$$\begin{aligned} & | \lambda \alpha(x) + (1-\lambda) \alpha(y) \# \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) | \\ & \leq \{ \lambda m(x) + (1-\lambda) m(y) - m(\lambda x + (1-\lambda)y) \} / x_0. \end{aligned}$$

ここに  $x_0$  は  $L$  の零点、 $\#$  は次式により定義されるものとする。

$$\# = \begin{cases} - & \text{if } (\lambda \alpha(x) + (1-\lambda) \alpha(y)) \times \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq 0 \\ + & \text{if } (\lambda \alpha(x) + (1-\lambda) \alpha(y)) \times \alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) < 0. \end{cases}$$

定義 6.3  $T(x) = (m(x), \alpha(x))_L, \quad x \in X$  において、 $m(x)$  と  $\alpha(x)$  が共に affine linear のとき、 $T$  は affine linear であるという。

命題 6.2  $T: X \rightarrow F_L$  が affine linear なら、 $T$  は convex map である。

命題 6.3  $m$  を  $X$  上の任意の凸関数、 $c$  を  $|c| \leq 1$  をみたす任意の実数とする。 $\alpha(x)$  を

$$\alpha(x) = c m(x), \quad x \in X$$

で定めるとき、 $T(x) = (m(x), \alpha(x))_L$  は convex map である。

定義 6.4  $T: X \rightarrow F_L$ ,  $S \subset X$  に対し、 $F_L$  の元  $K_0$  が存在して  

$$T(x) \lesssim K_0 \quad \forall x \in S,$$

が成り立つとき、 $T$  は  $S$  において上方に有界であるという。

定理 6.2  $\Omega$  を  $X$  の開凸部分集合、 $T: \Omega \rightarrow F_L$  を convex map、 $x_0 \in \Omega$  とする。このとき  $T$  が  $x_0$  のある近傍において上方に有界ならば、 $T$  は  $x_0$  において連続である。

定理 6.3  $T(x) = (m(x), \alpha(x))_L$  は convex map であるとする。  $z, h$  を  $X$  の点とし、次の仮定をおく：

正数  $\lambda_0$  が存在して

$$\alpha(z + \lambda h) \geq \alpha(z) \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$$

または

$$\alpha(z + \lambda h) \leq \alpha(z) \quad \forall \lambda \in [0, \lambda_0]$$

のどちらかが成立する。

このとき

- (1)  $m, \alpha$  の  $z$  における  $h$  方向の片側方向微分  $m^+(z; h), \alpha^+(z; h)$  が存在する。
- (2)  $T$  の  $z$  における  $h$  方向の片側方向微分  $F^+(z; h)$  が存在して

$$F^+(z; h) = (m^+(z; h), \alpha^+(z; h))_L$$

と表される。

#### 参考文献

- [1] D. Dubois and H. Prade, Operations on fuzzy numbers, Int. J. Systems Science 9(1978), 613-626.
- [2] D. Dubois and H. Prade, Systems of linear fuzzy constraints, Fuzzy Sets and Systems 3(1980), 37-48.
- [3] D. Dubois and H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, Informatin Sciences 30(1983), 183-224.
- [4] H. Prade, Model semantics and fuzzy ste theory, in "Fuzzy Set and Possibility Theory" (R. R. Yager, ed.), 232-246, Pergamon Press, Oxford-New York, 1982.